

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԿԱԹԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ  
ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Իշխանյան Հայկ Արթուրի

ՈՉ ԳՈՒՅՈՒՆ ԿՅՈՒԹԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐ ԲՎԱՆՏԱՅԻՆ ԱՆՈՒՄԱՐՉՈՒՄԸ ԵՎ  
ԹՈՒՆԵԼԱՅՈՒՄԸ

Ա. 04. 21 - "Դազմերային Ֆիզիկա" մասնագիտությամբ  
ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների  
բնկանտի գիտական ստաիճանի հայցման առնայախաղայան

ՍԵՂՄԱԳՐ

Երևան – 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА  
ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ишханян Айк Артурович

КВАЛИТОВОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ТУНИЦИПОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ  
МАТЕРИАЛЬНЫХ ВОЛН

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 01. 04. 21 – "Лазерная физика"

Ереван – 2013

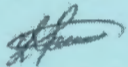
Ատենախոսության թեման հաստատվել է  
ՀՀ ԳԱԱ Ֆիզիկական Հետազոտությունների Ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.մաթ. գիտությունների դոկտոր,  
ՄՖՏԻ պրոֆեսոր Վ.Պ. Կրայնով  
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.մաթ. գիտությունների դոկտոր,  
պրոֆեսոր, Գազիկ Կրյուկյան  
ֆիզ.մաթ. գիտությունների դոկտոր,  
պրոֆեսոր, Վլադիմիր Մանկո  
Առաջատար կազմակերպություն՝ Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան Ազգային  
Գիտական Լաբորատորիա

Պաշտպանությունը կայանալու է 2013թ. դեկտեմբերի 10-ին Ժ.15<sup>00</sup>-ին ՀՀ ԳԱԱ  
Ֆիզիկական Հետազոտությունների Ինստիտուտում (0203, Աշտարակ-2, ՀՀ ԳԱԱ  
ՖՀԻ) Ֆիզիկայի 049 մասնագիտական խորհրդում:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 8 նոյեմբերի 2013թ.

Մասնագիտական խորհրդի ղիտական քարտուղար՝  ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
Վ.Պ. Քալանթարյան

Тема диссертации утверждена в Институте Физических Исследований НАН РА

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук,  
профессор МФТИ В.П.Крайнов

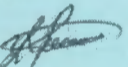
Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук,  
профессор Гагик Крючкян  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор Владимир Манько

Ведущая организация: Национальная Научная лаборатория  
им. А.И. Алиханяна

Защита состоится 10 декабря 2013г. в 15<sup>00</sup> часов в Институте Физических  
Исследований НАН РА (0203, Аштарак-2, ИФИ НАН РА) на заседании  
специализированного совета по Физике 049.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 8 ноября 2013г.

Учёный секретарь кандидата физ.-мат. наук, доцент  
специализированного совета  В.П. Калантарян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

В 1925 году, на основе работ Шатъендраната Бозе, Альберт Эйнштейн предсказал переход частиц материи в одно единственное квантовое состояние при низких температурах.

Это состояние материи, Бозе-Эйнштейновский конденсат, в принципе, встречается во многих физических ситуациях (например, в сверхпроводимости и сверхтекучести, в лазерном излучении, в нейтронных звездах). Однако, в чистом виде, то есть, без наложенных сильных внешних факторов (таких, как, например, решеточное взаимодействие в явлении сверхпроводимости металлов), в системе массовых материальных тел, впервые было получено в ультрахолодных разреженных газах нейтральных атомов в 1995 году. За это достижение в 2001 году Эрику Корнеллу и Карлу Вайману, совместно с Вольфгангом Кеттерли, была присуждена Нобелевская премия по физике. Впоследствии, в холодных фермионных атомарных газах экспериментально было достигнуто еще одно важное состояние материи – вырожденный Ферми-газ.

Сегодня, с помощью подобных вырожденных квантовых систем ультрахолодных бозон/фермионных частиц (атомов, молекул) проводят намного более точные измерения как физических величин, так и фундаментальных постоянных. Эксперимент и теория довольно точно сопоставляются. Еще тридцать лет назад значительной составляющей мотивации работ с холодными атомами являлась идея о том, что с их помощью измерения станут еще точнее. Но отцы лазерного охлаждения даже не представляли, в какой степени они должны были оказаться правы. Изначально концентрировались на применениях в измерении времени и частот (например, точность атомных часов улучшилась на два порядка). Но сегодня, холодные атомы применяются при измерении широкого класса физических величин и фундаментальны констант. Так, например, используя явную демонстрацию волновой природы атомов, при температурах микрокельвин и ниже, бурно развивается атомная интерферометрия. На ее основе создаются акселерометры, гиromетры, градиометры, гравиметры, точность которых сопоставима или превосходит точности "традиционных" устройств на самых разных принципах. Также холодные атомы были использованы для измерения постоянной тонкой структуры с точностью порядка  $10^{-9}$  (расчет

проводился при наблюдении эффекта Доплера). Используя атомный лазер, сегодня значительно приблизились к точности, необходимой для обнаружения гравитационных волн.

Параллельно, заметно развивается сама теория вырождения квантовых газов. Ультрахолодное вещество может предоставить возможность практически идеальной реализации важных квантовых парадигм, таких, как основополагающий принцип суперпозиции, надбарьерное отражение, туннелирование, явления квантовой интерференции и дифракции материальных волн и т. п.. При этом важно, что в случае вырожденных квантовых Бозе- и Ферми-газов данные тесты проводятся в нелинейной ситуации, то есть, когда рассматриваемые системы эффективно управляются существенно нелинейными уравнениями движения. Здесь следует отметить, что данная нелинейность, с точки зрения принципиального подхода, есть следствие всего лишь способа описания многочастичной задачи несколькими упрощенными математическими методами, а не является фундаментальным отрицанием линейной природы квантовой механики. Таким образом, многочастичные модели, которые интенсивно применяются в разных областях атомной и молекулярной физики, предоставляют дополнительные возможности для тестирования квантовой механики в иной физической обстановке. Важно еще, что беспрецедентно высокая степень контролируемости межчастичных взаимодействий внешними электромагнитными полями, достигнутая в настоящее время в экспериментах, позволяет исследовать квантовые жидкости в прежде не доступных режимах и условиях.

Поэтому, в настоящее время область ультрахолодных квантовых газов в высшей степени активна и расширяется во многих разных направлениях. В настоящей работе рассматривается одно из вышеперечисленных принципиально важных квантовых эффектов – надбарьерное прохождение и отражение материальных волн – для различных видов (одномерного) отражающего потенциала конечной глубины/высоты (прямоугольная яма, потенциал Розена-Морзе, двойная дельта-яма и т.д.). Анализ проводится в рамках известного полуклассического приближения среднего поля Гросса-Питаевского. Подход, который, как было показано многочисленными скрупулезными исследованиями, проведенными в последние годы различными группами исследователей и экспериментально, и теоретически,

адекватно, с довольно высокой точностью описывает динамику Бозе-конденсата при достаточно большом количестве частиц, находящихся в конденсированном состоянии.

Следует отметить, что уравнение Гросса-Питаевского – кубически нелинейная версия нелинейного уравнения Шредингера, будучи непосредственным и, вероятно, простейшим – полиномиальным, обобщением линейного уравнения Шредингера, позволяет понять основополагающие механизмы, лежащие в основе нелинейной динамики во многих других физических ситуациях: в гидродинамике, нелинейной оптике, нелинейной акустике, физике конденсированного состояния, в динамике тепловых импульсов в твердых телах и Лангмюровских волн в теплой плазме, т.д..

#### Цель работы

1. Теоретическое исследование надбарьерного прохождения и отражения нелинейных материальных волн для ряда модельных одномерных потенциалов, хорошо изученных в линейной квантовой теории: потенциал ступеньки, прямоугольный потенциал, потенциал Розена-Морзе (квадратный секанс гиперболический), двойная дельта-яма.
2. Исследование случаев полного (безотражательного) прохождения нелинейных материальных волн, определение положения резонансов высших порядков полного надбарьерного прохождения для потенциалов конечной ширины (потенциал Розена-Морзе и прямоугольный барьер).
3. Изучение поведения конденсата в поле двойной ямы и исследование возникновения динамического хаоса в динамике частицы в поле периодического потенциала в рамках кубически нелинейного уравнения Шредингера.

#### Научная новизна и практическая ценность работы

Научная новизна обусловлена как самими рассмотренными задачами, перечисленными выше, так и заметными методологическими новшествами, разработанными в процессе исследования. В частности:

1. При работе над задачей надбарьерного отражения Бозе-конденсатов от потенциала Розена-Морзе (глава 2), был предложен специфический математический подход для изучения резонансов полного

(безотражательного) прохождения, основанный на переформулировке проблемы в качестве задачи на собственные значения относительно высоты/глубины потенциальной ямы. Этот подход достаточно общий и позволяет исследовать многочисленные потенциалы разных пространственных форм (двойной прямоугольный барьер, произведение параболического потенциала и Гауссовского конверта (который моделирует обычно используемую в опытах оптическую ловушку) или асимметричный потенциал, имеющий два разных масштаба изменения в разных областях пространства).

Кроме того, можно показать, что этот подход является гибким инструментом, который может применяться, с небольшой модернизацией, не только в указанных случаях, но и для значительно более широкого круга задач, описывающих дополнительные эффекты. В числе таких задач, в частности, нелинейный квантовый транспорт, туннелирование и самозахват Бозе-конденсатов.

Наконец, метод предоставляет возможность исследовать резонансы безотражательного прохождения нелинейных материальных волн при нелинейностях, отличающихся от квадратичной нелинейности среднего поля Гросса – Питаевского (например, четвертой степени или насыщающая).

2. В разделе 2.4 выведено нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для плотности конденсата, эквивалентное уравнению Гросса-Питаевского (модуляция фазы конденсата вычисляется впоследствии через плотность с помощью квадратуры). При достаточно больших волновых числах падающей материальной волны это уравнение приводится к нелинейному предельному уравнению первого порядка, решение которого можно использовать при приближенном расчете интеграла для определения резонансной глубины ямы и тем самым построить простое приближение высокой точности.

Поскольку общее решение этого предельного уравнения известно для произвольного потенциала (решение находится как корень многочленного уравнения третьего порядка), такой шаг предоставляет систематическую возможность рассмотрения отражающих потенциалов разных видов.

3. Исследование возникновения динамического хаоса в поле одномерного периодического потенциала при наличии кубической нелинейности, свойственной для уравнения Гросса-Питаевского, может быть полезно при аналитическом описании длинных Джозефсоновских переходов и некоторых других процессов квантового микромира. Кроме того, результаты представляют дополнительный интерес, поскольку моделируют процессы, описываемые нелинейным уравнением диффузии и поэтому могут быть применены для подавления шумов в определенных технических системах и устройствах, таких как, например, нелинейные волоконно-оптические устройства связи.
4. Наконец, как уже было отмечено выше, данное исследование касается нелинейного уравнения Шредингера, которое является важной моделью, встречающейся в разных областях физики (нелинейная оптика, спиновые волны в магнитных пленках, Лангмюровские волны в теплой плазме и гравитационные поверхностные волны в жидкостях). Поэтому круг нелинейных эффектов, охваченных настоящей работой, представляет общефизический интерес, а результаты носят принципиальный характер и могут быть применимы к широкому кругу аналогичных задач.

#### Основные положения, выносимые на защиту

1. Наличие трех различных сценариев эволюции системы (колебательный, неколебательный и расходящийся) при распространении материальных волн над потенциалом формы ступеньки при наличии кубической нелинейности приближения Гросса-Питаевского. Полный анализ, на основе точного решения задачи, выраженного через эллиптическую sn-функцию Якоби, всего двумерного пространства безразмерных входных параметров задачи (параметр нелинейности и высота барьера в единицах химического потенциала конденсата), определение точных границ областей, соответствующих каждому из возможных сценариев, и точное определение положения сингулярной точки, где происходит скачок от одного сценария поведения к другому.

2. Поправки к коэффициенту отражения и аналитические условия на параметры для полного (безотражательного) прохождения над прямоугольным потенциалом, потенциалом Розена-Морзе, двойной дельта-ямой в одномерной задаче квантового надбарьерного отражения нелинейных материальных волн, описываемой кубическим нелинейным уравнением Шредингера при малых нелинейностях,
3. Высокоточный анализ положений резонансов полного надбарьерного прохождения материальных волн в приближении нелинейного уравнения Шредингера. Данные положения получены путем переформулировки проблемы в качестве квазилинейной задачи на собственные значения относительно высоты/глубины потенциала, что представляет собой самостоятельный методологический интерес, поскольку может быть применен к ряду других одномерных потенциалов и для других форм нелинейности.

Частные физические результаты:

- Точное, в рамках приближения Гросса-Питаевского, положение первого нелинейного резонанса полного прохождения для потенциала Розена-Морзе.
  - Демонстрация, с помощью точного решения задачи для первого резонанса, возможности безотражательного прохождения над потенциалом положительной высоты (т.е., над барьером). Данный результат распространен на резонансы высшего порядка с применением аппарата уравнения третьего порядка для плотности вероятности (пункт 5).
  - Формулы для сдвига положения  $n$ -го резонанса из-за нелинейности: сдвиг резонансов высших порядков линеен по отношению к порядку резонанса для потенциала Розена-Морзе и постоянен для прямоугольного барьера.
4. Значения параметров, вызывающих динамический хаос в поведении квантовой системы в поле периодического потенциала оптической решетки в случае приближения Гросса-Питаевского с отталкивающей нелинейностью.

## Апробация

Основные результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на многих семинарах разных организаций (Российская Федерация: кафедра теоретической физики и кафедра общей физики МФТИ, ФАКИ МФТИ, ФОПФ МФТИ, Физический Институт Академии Наук (ФИАН), Владимирский Государственный Университет, Самарское отделение ФИАН; Армения: ИФИ НАН РА; Франция: Université de Bourgogne (Dijon); Соединенное Королевство: Isaac Newton Institute (Cambridge); Германия: Physiczentrum of Bad Honnef, Max Planck Institute for Physics of Complex Systems и другие), а так же на следующих международных конференциях (17):

1. International Conference "Modern problems in Optics and Photonics MPOP - 2009", 27 August - 2 September, 2009, Yerevan, Armenia, oral talk.
2. International Conferences "Laser Physics 2009-2012", October, Ashtarak, Armenia, posters and oral talks.
3. 3<sup>rd</sup> International School CPLP "Contemporary Problems of Laser Physics", November 9-11, 2009, Moscow, Russia, oral talk.
4. VII All-Russian Samara Youth Conference-contest "Optics and Laser Physics - 2009", November 18-21, 2009, Samara, Russia, oral, winner.
5. The 16th Central European Workshop on Quantum Optics (CEWQO), 23-27 May, Turku, Finland.
6. 52<sup>nd</sup> and 53<sup>rd</sup> Traditional MIPT conferences "Modern problems in fundamental and applied sciences", November, 2009/2010, Moscow, Russia, oral talks, winner.
7. 450th WE-Heraeus-Seminar "Mixed States of Light and Matter", February 7 - 10, 2010, Physikzentrum Bad Honnef, Germany, poster.
8. Conference "Young Scientists of Russia", April 16, 2010, Moscow, Russia, poster, winner.
9. Conference-contest of young physicists of the Moscow Physical Society, section "Fundamental Physics", April 19, 2010, Moscow, Russia, oral, absolute winner.
10. First International School for Young Researchers "Applied Mathematics and Physics", Dolgoprudny, Moscow region, Russia, July 1-13, 2010.
11. International Workshop and Summer school "Quo Vadis Bose-Einstein Condensate", August 2 - 20, 2010, MIPPKS Dresden, Germany, poster and oral talk.
12. International conference "Optics and its applications", September 4-7, 2011, Yerevan, Armenia, poster.
13. Les Houches Physics School "Cold gases with long range interactions", September 18-30, 2011, Les Houches, France, poster.

За отдельные части этой работы автор был награжден 3 медалями, соответственно, Европейской, Российской и Международных Академий Наук.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 16 работ, из них 9 статей в международных рецензируемых журналах (список в конце диссертации).

**Структура и объем.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы. Содержание работы изложено на 111 страницах, включая 32 рисунка и библиографию из 103 различных наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В первой главе** рассматривается нелинейное квантовое распространение материальных волн над потенциалом формы ступеньки в приближении Гросса-Питаевского.

**В § 1.1** дается короткое представление о приближении среднего поля и выводится соответствующее уравнение Гросса-Питаевского.

**В § 1.2** аналитически исследуется отражение холодных щелочных атомов резонансным лазерным пучком в рамках приближения Гросса-Питаевского (кубически нелинейного уравнения Шредингера). Методом многих масштабов вычислена поправка к коэффициенту отражения из-за слабой нелинейности стационарного уравнения Шредингера. Нелинейность добавляет пространственные гармоники к линейной падающей и отраженной волнам. Показано, что роль нелинейности увеличивается, когда кинетическая энергия атома близка к высоте потенциального барьера. Результаты сравнены с известными численными расчетами.

**В § 1.3** рассмотрено распространение материальных волн над потенциалом формы ступеньки в рамках кубически нелинейного уравнения Шредингера. Проведен комплексный анализ соответствующей стационарной задачи, основанный на точном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка для плотности вероятности. Представлено и проанализировано точное решение задачи, выраженное через эллиптическую  $sn$ -функцию Якоби. Классифицированы, в зависимости от входных параметров системы, качественно различные типы картины распространения волн. Выявлены три сценария динамики системы: колебательный, неколебательный и расходящийся. Анализируя 2D-пространство безразмерных параметров задачи (параметр нелинейности и высота/глубина отражающего потенциала, в единицах

химического потенциала), показано, что область параметров, где нет ограниченного решения, задается замкнутой кривой, состоящей из сегмента эллиптической кривой и двух отрезков. Показано, что существует определенная особая точка, принадлежащая указанной эллиптической кривой, где происходит скачок от одного сценария эволюции к другому. Определено положение этой точки, и для всех разрешенных областей вовлеченных входных параметров задачи описаны и проанализированы в деталях особенности сценариев эволюции.

## **Вторая глава**

**В § 2.1** рассмотрено квантовое надбарьерное отражение Бозе-Эйнштейновских конденсатов одномерным прямоугольным потенциальным барьером или ямой в приближении кубически нелинейного уравнения Шредингера с малой нелинейностью. Самый интересный случай реализуется, когда коэффициент отражения равен нулю для линейного уравнения Шредингера. Тогда отражение определяется малым нелинейным членом в уравнении Гросса-Питаевского. Было получено простое аналитическое выражение для коэффициента отражения создаваемого нелинейностью. Получено аналитическое условие для того, чтобы общее действие потенциального барьера и нелинейности приводило к нулевому коэффициенту отражения. Аналитически выведен коэффициент отражения вблизи резонансов, которые смещены из-за нелинейности.

**В § 2.2** рассмотрено квантовое надбарьерное отражение частицы от одномерной потенциальной ямы Розена-Морзе для нелинейного уравнения Шредингера со слабой нелинейностью. Наиболее интересными вновь, как и в случае прямоугольного барьера, оказываются резонансные случаи, когда для линейного уравнения Шредингера коэффициент отражения строго равен нулю. Тогда отражение определяется только малым нелинейным членом в уравнении Гросса-Питаевского. Получено простое аналитическое выражение для коэффициента отражения, определяемого только нелинейностью. Найдено аналитическое выражение, связывающее глубину потенциальной ямы и величину нелинейности для получения

нулевого коэффициента отражения. Также, коэффициент отражения вычислен аналитически вблизи резонанса, сдвинутого нелинейностью.

**В § 2.3** рассмотрено квантовое надбарьерное отражение ультрахолодных атомов потенциалом Розена-Морзе в рамках приближения среднего поля Гросса-Питаевского. Переформулируя задачу безотражательного прохождения как квазилинейную задачу на собственные значения для глубины потенциала, используя модифицированную стационарную теорию возмущений Рэлея-Шредингера, определены особые высоты потенциала, при которых происходит полное прохождение. Приближение с большой точностью описывает положения резонансов для всех порядков резонансов, если параметр нелинейности мал по сравнению с химическим потенциалом налетающей частицы. Примечательно, что результат для первого резонанса оказывается точным, т.е., выведенная формула для резонансной высоты потенциала дает точное значение положения первого нелинейного резонанса для всей допустимой области изменения параметров задачи (параметр нелинейности и химический потенциал).

Последнее было показано построением точного решения для первого резонанса. Более того, указанное приближение показывает, что в нелинейном случае безотражательное прохождение может происходить не только для потенциальных ям, но и для потенциальных барьеров с положительной высотой потенциала. Оно также показывает, что нелинейное смещение положения резонанса от положения соответствующего линейного резонанса описывается примерно линейной функцией порядка резонанса. Наконец, комбинируя аналитические и численные методы, сконструирована компактная, тем не менее, высокоточная аналитическая формула для положения  $n$ -го резонанса.

**В § 2.4** подробно исследованы, с помощью точного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка для плотности вероятности, резонансы полного прохождения высших порядков при надбарьерном отражении Бозе-конденсатов от потенциала Розена-Морзе в приближении Гросса-Питаевского. Другим методом получено точное решение для первого резонанса и показано, что в нелинейном случае безотражательное прохождение возможно и над барьерами (потенциалами с положительной высотой). Далее показано, что хорошее приближение для резонансов

высших порядков может быть построено, используя предельное решение уравнения для плотности, получаемое как корень полиномиального уравнения третьего порядка. Используя предельную функцию и решение для первого резонанса, построено простое приближение для смещения положения нелинейного резонанса по отношению к позиции линейного резонанса для резонансов высших порядков. Результат выписывается как линейная функция порядка резонанса. Такое поведение заметно отличается от случая прямоугольного барьера, где нелинейное смещение примерно постоянно для всех порядков резонансов.

**Третья глава** посвящена составным барьерам.

**В § 3.1** аналитически исследовано резонансное отражение Бозе-Эйнштейновского конденсата двойным дельта-барьером в приближении Гросса-Питаевского. Выведен коэффициент отражения при слабой нелинейности, которая появляется из-за самовоздействия ансамбля холодных щелочных атомов. Одномерный потенциал аппроксимирован двумя отталкивающими дельта-функциональными барьерами. Используя метод многих масштабов для избавления от секулярных членов, получено аналитическое выражение для коэффициента отражения. Самый интересный случай соответствует энергиям конденсата, при которых без нелинейного члена отсутствует отражение. Тогда отражение происходит из-за нелинейности. Выведен коэффициент отражения в первом порядке по параметру нелинейности.

**§ 3.2** посвящен исследованию динамического хаоса в динамике квантовой системы в поле одномерного периодического потенциала оптической решетки, в рамках приближения кубически нелинейного стационарного уравнения Шредингера с отталкивающей нелинейностью. Показана математическая аналогия с задачей классической механики о математическом маятнике Капицы, который возбуждается слабым регулярным высокочастотным возмущением. При определенных значениях параметров задачи в системе возникает динамический хаос, который аналитически моделируется нелинейным уравнением диффузии. Критерием Чирикова определены и проанализированы значения параметров системы, при которых имеет место динамический хаос.

**В заключении** сформулированы основные полученные результаты.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Исследована задача надбарьерного распространения нелинейных материальных волн над одномерными потенциалами в рамках кубически нелинейного уравнения Шредингера. Основные результаты работы:

1. В задаче квантового транспорта над потенциалом формы ступеньки:
  - вычислена поправка к коэффициенту отражения из-за слабой нелинейности.
  - через эллиптические функции Якоби записано точное решение задачи в нелинейном случае. Показано существование качественно разных сценариев распространения волны (осциллирующий, неосциллирующий и расходящийся). Тщательно проанализирована 2D-плоскость безразмерных параметров задачи (параметр нелинейности и высота ступеньки в единицах химического потенциала). Показано, что область, где решение неограниченно, ограничена сегментом эллиптической кривой и двумя отрезками. Определена явная форма эллиптической кривой и показано, что на этой кривой существует особая сингулярная точка, где происходит скачок от одного возможного сценария эволюции к другому. Точно определено положение этой точки и описаны особенности динамики системы во всех областях параметров задачи.
2. В задаче распространения материальных волн над прямоугольным потенциальным барьером/ямой конечной ширины и потенциалом Розена-Морзе получены простые аналитические выражения для коэффициента отражения, создаваемого только нелинейностью. Получено аналитическое условие для того, чтобы общее действие потенциального барьера и нелинейности приводило к нулевому коэффициенту отражения. Аналитически выведен коэффициент отражения вблизи резонансов, которые смещены из-за нелинейности.
3. Разработан математический подход изучения резонансов полного (безотражательного) надбарьерного прохождения, основанный на переформулировке проблемы в качестве задачи на собственные значения для глубины/высоты потенциала. Этот подход является гибким инструментом, который может применяться не только в указанном случае, но и для более

широкого круга задач. В числе таких задач, в частности, нелинейный квантовый транспорт, туннелирование и самозахват Бозе – конденсатов.

Тем же способом можно исследовать многочисленные потенциалы разных пространственных форм (двойной прямоугольный барьер, произведение параболического потенциала и Гаусовского конверта (которое моделирует обычно используемую в опытах оптическую ловушку) или асимметричный потенциал, имеющий два разных масштаба изменения в разных частях пространства).

Кроме того, метод предоставляет возможность исследовать резонансы безотражательного прохождения многочастичных нелинейных квантовых систем, описываемых нелинейностями, отличающимся от квадратичной нелинейности среднего поля Гросса – Питаевского; подобным примером является рассмотренный нами случай насыщающей нелинейности.

Результаты, полученные применением метода, следующие:

- Определено положение первого нелинейного резонанса полного прохождения для потенциала Розена-Морзе (результат точный в рамках приближения Гросса-Питаевского).
  - Получены простые формулы для сдвига положения  $n$ -го резонанса из-за нелинейности: для резонансов высших порядков сдвиг оказывается примерно линейным по отношению к порядку резонанса для потенциала Розена-Морзе и примерно постоянным в случае прямоугольного барьера.
  - Показана возможность безотражательного прохождения материальных волн над потенциалом положительной высоты (т.е., над барьером).
4. Выведено нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для плотности конденсата, эквивалентное уравнению Гросса-Питаевского. При достаточно больших волновых числах падающей материальной волны это уравнение приводится к нелинейному предельному уравнению первого порядка, решение которого можно использовать при приближительном расчете интеграла для определения резонансной глубины ямы и получить приближение высокой точности.

Поскольку общее решение предельного уравнения известно для произвольного потенциала (решение находится как корень многочленного

уравнения третьего порядка), такой шаг предоставляет систематическую возможность рассмотрения отражающих потенциалов разных видов. Применением этого подхода воспроизведены результаты предыдущего пункта и показано, что явное отличие в поведении резонансов в случаях потенциалов Розена-Морзе и прямоугольного барьера обусловлено плавным изменением потенциала Розена-Морзе в отличие от резкого изменения в последнем случае. Таким образом, показана чувствительность процесса прохождения к разрывам в формах барьеров.

5. В задаче отражения материальных волн от двойного дельта-потенциала получен коэффициент отражения в нелинейном случае в рамках приближения Гросса-Питаевского. Получены и проанализированы положения резонансов полного прохождения.
6. Показано возникновение, при определенных значениях параметров, динамического хаоса в решении кубически нелинейного стационарного уравнения Шредингера для одномерного периодического потенциала оптической решетки в случае отталкивающей нелинейности. Найдены соответствующие значения параметров и показано, что хаос аналитически моделируется нелинейным уравнением диффузии.

#### СПИСОК РАБОТ АВТОРА, ВКЛЮЧЕННЫХ В ДИССЕРТАЦИЮ

1. H.A. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Above-Barrier Reflection of Cold Atoms by Resonant Laser Light within the Gross-Pitaevskii Approximation", *Laser Physics* **19** (8), 1729-1734 (2009).
2. H.A. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Multiple-scale analysis for resonance reflection by a one-dimensional rectangular barrier in the Gross-Pitaevskii problem", *Phys. Rev. A* **80**, 045601 (2009).
3. H.A. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Resonance reflection by the one-dimensional Rosen-Morse potential well in the Gross-Pitaevskii problem", *JETP* **109** (4), 585-589 (2009).
4. H.A. Ishkhanyan, V.P. Krainov, and A.M. Ishkhanyan, "Transmission resonances in above-barrier reflection of ultra-cold atoms by the Rosen-Morse potential", *J. Phys. B* **43**, 085306 (2010).
5. H.A. Ishkhanyan, "Higher order above-barrier resonance transmission of cold atoms in the Gross-Pitaevskii approximation", *Proc. of Intl. Advanced Research Workshop MPOP-2009*, Yerevan, Armenia, 35 (2010).
6. H.A. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Higher order transmission resonances in above-barrier reflection of cold atoms in the mean-field Gross-Pitaevskii approximation", *Proc. of Intl. Conf. Laser Physics-2009*, Ashtarak, 65 (2010).
7. V.P. Krainov and H.A. Ishkhanyan, "Resonant reflection of Bose-Einstein condensate by a double delta-function barrier within the Gross-Pitaevskii equation", *Laser Physics* **20** (9), 1856-1860 (2010).
8. V.P. Krainov and H.A. Ishkhanyan, "Resonant reflection of a Bose-Einstein condensate by a double barrier within the Gross-Pitaevskii equation", *Physica Scripta*, **T140**, 014052 (2010).
9. H.A. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Dynamic chaos in the solution of the Gross-Pitaevskii equation for a periodic potential", *JETP*, vol. **113** (3), 407-411 (2011).
10. H.A. Ishkhanyan, A. Manukyan, A.M. Ishkhanyan, "Matter wave propagation above a step potential within the cubic-nonlinear Schrödinger equation", *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, Vol. **15**, 232, World Scientific Publishing Company (2012).

11. H.A. Ishkhanyan, V.P. Krainov and A.M. Ishkhanyan, "Higher order transmission resonances in above-barrier reflection of ultra-cold atoms", *Journal of Physics: Conference Series published by Institute of Physics*, **350** 012012, (2012).

12. H.A. Ishkhanyan, "Dynamic chaos in the solution of nonlinear Schroedinger equation in cylindrical coordinates for a periodic potential", *Proc. of anniversary scientific session of YSU SSS (Intl. Conf.)*, Vol. 5, p. 109-113 (2012).

**Статьи в сборниках трудов Российских конференций с международным участием**

13. H.A. Ishkhanyan, V.P. Krainov "Нелинейное надбарьерное прохождение в приближении Гросса-Питаевского: потенциал Розена-Морзе и прямоугольный барьер", *Proceedings of VII All-Russian Samara Youth Conference-contest "Optics and Laser Physics – 2009"*, 84 (2009).

14. H.A. Ishkhanyan, V.P. Krainov, A.M. Ishkhanyan "Нелинейное надбарьерное прохождение в приближении Гросса-Питаевского: примерная эквидистантность сдвига глубины барьера для различных резонансов", *Proc. of 52nd Traditional MIPT conference "Modern problems in fundamental and applied sciences"*, 89 (2009).

**Тезисы**

15. V. Krainov and H. Ishkhanyan, "Above-barrier reflection of ultra-cold alkali atoms by resonant laser light within the Gross-Pitaevskii approximation", *CEWQO 2009, Report series in physics, University of Turku, Ser. L 32*, p. 129 (2009).

16. H.A. Ishkhanyan, V.P. Krainov, A.M. Ishkhanyan, "Нелинейное надбарьерное прохождение в приближении Гросса-Питаевского: примерная эквидистантность нелинейного сдвига глубины барьера для различных резонансов", *Proc. of 3<sup>rd</sup> International School CPLP (MSU), Moscow, Russia* (2009).

**ՈՉ ԳՕՍԱԵՆ ԼՅՈՒԹԱԿԱՆ ԱԼԻԲՆԵՐԻ ՔՎԱՆՏԱԵՆ ԱՆՈՒՄԱՐՇՈՒՄԸ ԵՎ**

**ԹՈՒՆԵԼԱՑՈՒՄԸ**

Շրջողիզերի խորանարդային ոչ գծային հավասարման շրջանակներում հետազոտվել է ոչ գծային նյութական ալիքների տարածումը միաչափ պոտենցիալների վրայով: Աշխատանքի հիմնական արդյունքները հետևյալն են.

1. Աստիճանաձև պոտենցիալի վրայով քվանտային տրանսպորտի խնդրում.
  - հաշվված է անդրադարձման գործակցի ուղղումը թույլ ոչ գծայնության պատճառով:
  - Յակոբիի էլիպտիկ ֆունկցիաների միջոցով գրված է ոչ գծային դեպքում խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Մանրամասն հետազոտված է խնդրի առանց չափողականության պարամետրերի (ոչ գծայնության պարամետրի և աստիճանի բարձրության, քիմիական պոտենցիալի միավորներով արտահայտված) երկչափ հարթությունը: Ցույց է տրված ալիքի տարածման որակապես տարբեր սցենարների գոյությունը (տատանողական, ոչ տատանողական և տարամիտող): Ցույց է տրված, որ անսահմանափակ լուծման տիրույթը, ուրվագծվում է էլիպտիկ կորի մի սեգմենտով և երկու հատվածով: Որոշված է էլիպտիկ կորի բացահայտ տեսքն ու ցույց է տրված, որ այդ կորի վրա գոյություն ունի հատուկ սինգուլյար մի կետ, որտեղ տեղի է ունենում (էվոյուցիայի մի հնարավոր սցենարից մյուսին) անցումը: Ճշգրիտ որոշված է այդ կետի տեղը և նկարագրված են համակարգի դինամիկայի առանձնահատկությունները խնդրի պարամետրերի տարածության բոլոր տիրույթներում:
2. Վերջավոր լայնության ուղղանկյուն արգելիչ/հորի և Ռոզեն-Մորգեի պոտենցիալի վրայով նյութական ալիքների տարածման խնդրում միայն ոչ գծայնությամբ պայմանավորված անդրադարձման գործակցի համար ստացված են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ: Ստացված է անալիտիկ պայմանն այն դեպքի համար, երբ պոտենցիալ արգելիչի և ոչ գծայնության ընդհանուր ազդեցությունը բերում է անդրադարձման գոյական գործակցի: Անալիտիկ դուրս է բերված (ոչ գծայնության պատճառով տեղաշարժված ռեզոնանսների մոտակայքում) անդրադարձման գործակիցը:
3. Մշակված է լրիվ (անանդրադարձ) վերարգելիչային անցման ռեզոնանսների հետազոտման մաթեմատիկական մոտեցում: Այն կայանում է սկզբնական խնդրի (որպես պոտենցիալի բարձրության/խորության համար սեփական արժեքների խնդրի) վերաձևակերպման մեջ: Այս մեթոդը ճկուն գործիք է, որը կարող է կիրառվել ոչ միայն նշված դեպքում, այլ նաև խնդիրների ավելի լայն շրջանակի համար: Այդպիսիք են, մասնավորապես, քվանտային ոչ գծային տրանսպորտը, Բոզե-կոնդենսատների թունելացումն ու ինքնաթակարդումը:  
Նույն եղանակով կարելի է տարբեր տարածական ձևի բազմաթիվ պոտենցիալներ հետազոտել (կրկնակի ուղղանկյուն արգելիչը, պարաբոլիկ պոտենցիալի և Գաուսյան ծրարի արտադրյալը (մոդելավորում է փորձերում սովորաբար օգտագործվող օպտիկական թակարդը) կամ ասիմետրիկ պոտենցիալը (տարածության տարբեր մասերում երկու տարբեր կերպ փոփոխվող պոտենցիալը)):

Բացի այդ, մեթոդը հնարավորություն է ընձեռում Գրոսս-Պիտանսկու միջին դաշտի քառակուսային ոչ գծայնությունից տարբեր ոչ գծայնություններով նկարագրվող քվանտային բազմամասնիկային համակարգերի անանդրադարձ անցման ռեզոնանսները հետազոտելու: Մրա օրինակ է մեր դիտարկած հազեցնող ոչ-գծայնության դեպքը:

Մեթոդի կիրառմամբ ստացված ֆիզիկական արդյունքները հետևյալն են.

- Որոշված է Ռոզեն-Մորզեի պոտենցիալի դեպքում լրիվ անցման առաջին ոչ գծային ռեզոնանսի դիրքը (արդյունքը ճշգրիտ է Գրոսս-Պիտանսկու մոտավորության շրջանակներում):
  - Ստացված են պարզ բանաձևեր ոչ գծայնության պատճառով  $\mathcal{N}$ -րդ ռեզոնանսի դիրքի շեղման համար: Բարձր կարգի ռեզոնանսների պարագայում շեղումը որպես ֆունկցիա ռեզոնանսի համարից, մոտավորապես գծային է ստացվում Ռոզեն-Մորզեի պոտենցիալի դեպքում, ն, մոտավորապես հաստատուն ուղղանկյուն արգելքի դեպքում:
  - Ցույց է տրված նյութական ալիքների՝ դրական բարձրության պոտենցիալի (այսինքն՝ արգելքի) վրայով անանդրադարձ անցման հնարավորությունը Գրոսս-Պիտանսկու մոտավորության շրջանակներում:
4. Դուրս է բերված Գրոսս-Պիտանսկու հավասարմանը համարժեք երրորդ կարգի մի ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարում կոնդենստի խտության համար: Ընկնող նյութական ալիքի բավական մեծ ալիքային թվերի դեպքում այս հավասարումը բերվում է առաջին կարգի ոչ գծային սահմանային հավասարման, որի լուծումը կարելի է օգտագործել հորի ռեզոնանսային խորության որոշման ինտեգրալի հաշվման համար և մեծ ճշտության մոտավորություն ստանալ:
- Քանի որ սահմանային հավասարման ընդհանուր լուծումը հայտնի է կամայական պոտենցիալի համար (լուծումը գտնվում է որպես երրորդ կարգի բազմանդամային հավասարման լուծում), այսպիսի քայլը տարբեր ձևի անդրադարձնող պոտենցիալների դիտարկման համակարգային հնարավորություն է ապահովում: Այս մոտեցման կիրառմամբ վերարտադրվել են նախորդ կետի արդյունքները և ցույց է տրվել, որ Ռոզեն-Մորզեի և ուղղանկյուն պոտենցիալների դեպքում ռեզոնանսների վարքում ակնհայտ տարբերությունը պայմանավորված է Ռոզեն-Մորզեի պոտենցիալի սահուն փոփոխությամբ, ի տարբերություն վերջին պոտենցիալի կտրուկ փոփոխության: Այսպիսով, ցույց է տրված անցման պրոցեսի զգալունությունը արգելքի ձևում խզումների նկատմամբ:
5. Նյութական ալիքների կրկնակի դելտա-պոտենցիալից անդրադարձման խնդրում, Գրոսս-Պիտանսկու մոտավորության շրջանակներում ստացված է ոչ գծային դեպքում անդրադարձման գործակիցը: Ստացված և վերլուծված են լրիվ անցման ռեզոնանսների դիրքերը:
6. Ցույց է տրված վանող ոչ գծայնության դեպքում օպտիկական ցանցի միաչափ պարբերական պոտենցիալի համար Շրյոդինգերի ոչ գծային ստացիոնար հավասարման լուծման մեծ դինամիկ քառսի հայտնվելը պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում: Գտնված են պարամետրերի համապատասխան արժեքները և ցույց է տրված, որ քառսը անալիտիկորեն մոդելավորվում է դիֆուզիայի ոչ գծային հավասարմամբ:

## QUANTUM REFLECTION AND TUNNELING OF NONLINEAR MATTER WAVES

Nonlinear matter-wave above-barrier propagation problem above one-dimensional potentials is considered within the cubic-nonlinear Schrödinger equation. The main results of the work are as follows:

1. In the problem of the quantum transport above a step potential:
  - A correction to the reflection coefficient due to small nonlinearity has been calculated.
  - Using the exact solution of the problem written in terms of the Jacobi elliptic functions, it is shown that in different regions of the 2D space of involved dimensionless parameters, the nonlinearity and the reflecting potential's height/depth, qualitatively distinct types of wave propagation (oscillatory, non-oscillatory and diverging) are observed. It is shown, that the region of the space where the solution is not restricted is defined by an elliptic curve and two lines. The explicit form of the elliptic curve is determined and it has been shown that there exists a singular point belonging to this curve that causes a jump from one possible evolution scenario to another one. The position of this point is determined and the peculiarities of the dynamics of the system for all the regions of involved parameters have been presented in detail.
2. In the problem of matter-wave propagation above finite length rectangular barrier and Rosen-Morse potential simple analytic expressions are derived for the reflection coefficient, caused only by nonlinearity. The analytic condition for common action of potential barrier and nonlinearity to compensate each other, thus resulting in zero reflection coefficient is obtained. The reflection coefficient in the vicinity of the resonances is derived analytically.
3. We have developed a specific mathematical approach to treat the total (reflectionless) transmission resonances, that essentially rests upon the reformulation of the problem as a eigenvalue problem for the reflecting potential's depth. This approach is a flexible tool that can be used not only in the mentioned case, but also for a wider range of problems. Among which, in particular, are the quantum transport, tunneling and self-trapping of the Bose – condensates.

Using the same method for several potentials with different spatial forms may be treated (e.g. double rectangular barrier, parabolic potential times a Gaussian envelope (which models typical optical traps used in experiments) or asymmetric potential that has two different variation scales in different regions).

Besides, the method provides a possibility to treat reflectionless transmission resonances of many-body quantum systems, governed by nonlinearities, other than the

quadratic one of the mean-field Gross-Pitaevskii; such an example is the case of saturated nonlinearity, considered recently.

Physical results, obtained with this method are:

- The position of the first nonlinear total transmission resonance above the Rosen-Morse potential is determined (this result turns out to be exact within the Gross-Pitaevskii approximation).
- Simple analytic formulas for  $n$ -th resonance position shift due to the nonlinearity have been derived: for higher order resonances the shift occurs to be linear with respect to the resonance order in the case of the Rosen-Morse potential and approximately constant for the rectangular barrier.
- The possibility of reflectionless transmission of matter-waves above a positive height potential (i.e. above barrier) has been shown.

4. We have derived a third-order nonlinear differential equation for the condensate density, equivalent to the Gross-Pitaevskii equation. For sufficiently large wave numbers of incident matter-wave this equation is reduced to a first-order nonlinear limit equation with a solution, that can be used in approximate calculation of the integral for determination of the resonant well depth and obtain a highly accurate approximation.

Since the general solution of the limit equation is known for an arbitrary potential (the solution is found as a root of a third-order polynomial equation), this approach provides a systematic way to treat reflecting potentials of different spatial forms. Using this approach we have reproduced the result of the previous point and have shown that the radical difference in the resonance behavior in the cases of Rosen-Morse potential and rectangular barrier is probably caused by the smooth variation of the Rosen-Morse potential's shape in contrast to the sharp variation in the case of the rectangular barrier. Thus, the sensitivity of the transmission process with respect to the barrier form has been shown.

5. In the problem of matter-wave reflection from a double-delta potential, we have calculated the reflection coefficient in the nonlinear case within the Gross-Pitaevskii approximation. The total transmission resonances are found and analyzed.
6. The emergence of dynamic chaos, for certain values of parameters, in the solution of cubic nonlinear stationary Schrödinger equation for one-dimensional periodic potential of optical lattice in the case of repulsive nonlinearity has been shown. The corresponding values of the parameters have been found and it has been shown that the chaos is analytically modeled by nonlinear diffusion equation.

